DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2020A052

图的反符号边控制数的新上界*

丁宗鹏

湖南第一师范学院数学与计算科学学院，湖南 长沙 410205

摘　要：对图 G 的反符号边控制数进行了研究，给出了一般图的反符号边控制数的若干新上界，并证明这些上界是可达的。

关键词：上界；反符号边控制函数；反符号边控制数

中图分类号：O157. 5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2097－0137（2022）04－0178－05

The new upper bounds of inverse signed edge domination number in graphs

DING Zongpeng

School of Mathematics and Computational Sciences, Hunan First Normal University, Changsha 410205, China

Abstract: The inverse signed edge domination number of the graph G is studied. Some new upper bounds of the inverse signed edge domination number of general graphs are given, and these upper bounds are proved to be sharp.

Key words: upper bound; inverse signed edge dominating function; inverse signed edge domination number

本文中所指的图均为无向简单图，顶点集为 V，边集为 E。没有说明的术语和符号参照文献[1]。设 $G=(V,E)$ 为一个图，对于任意顶点 $v\in V$，则 $N_G(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的点集，称为 v 的邻域，$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$ 为 v 点在 G 中的闭邻域。$d_G(v)=|N_G(v)|$ 表示 v 在 G 中的度。若一个图中每个顶点的度都为 r，则称这个图为 r 正则图。$N_G(v)$，$N_G[v]$，$d_G(v)$ 可分别简记为 $N(v)$，$N[v]$，$d(v)$. 记 Δ 和 δ 分别为图 G 的最大度和最小度。

类似地，对任意边 $e\in E(G)$，则 $N_G(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边集，称为 e 的边邻域，$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$ 为 e 点在 G 中的闭边邻域。$d_G(e)=|N_G(e)|$ 表示 e 在 G 中的边度，$N_G(e)$，$N_G[e]$，$d_G(e)$ 可分别简记为 $N(e)$，$N[e]$，$d(e)$. 记 Δ' 和 δ' 分别为图 G 的最大度和最小度。

记图 $G=(V,E)$ 的顶点数为 n，边数为 m . 若 $e=uv\in E$，我们不难得到 $d(e)=d(u)+d(v)-2$，于是 $2\delta-2\leqslant d(e)\leqslant 2\Delta-2$，且有

$$\sum_{e\in E}d(e)=\sum_{uv\in E}[d(u)+d(v)-2]=\sum_{u\in V}d^2(u)-2m.$$

近年来，图的控制理论的研究日趋活跃，相继产生了各种控制概念。图的很多不同类型的控制概念

* **收稿日期**：2020－09－11　　**录用日期**：2021－01－19　　**网络首发日期**：2022－01－07

基金项目：国家自然科学基金（11871206）；湖南省自然科学基金（2020JJ5095）；湖南省教育厅优秀青年项目（19B116）

作者简介：丁宗鹏（1987 年生），男；**研究方向**：图论及其应用；E-mail：dzppxl@163. com

及其变化形式被Cockayne等[2]先后引入。Haynes等[3-4]中阐述了目前所取得的主要研究成果。但是大多概念和结论都是围绕图的点控制展开，而图的边控制涉及不多。Xu在文献[5]中率先引入图的符号边控制概念，并在此基础上展开相关研究[6-7]。文献[8]定义了图的逆符号边控制，并研究了逆符号边控制数的上界。其他关于图控制数的相关结果可参考文献[9-13]。本文我们首先引入图的反符号边控制的定义，给出一般图的反符号边控制数的若干新上界，并且证明这些上界都是可达的。

1　反符号边控制数的概念及性质

问题的提出： 将一个图的边集E划分为E_1和E_2，使得G中每条边的闭邻域中第一类边不多于第二类边，问这两类边的数目之差$|E_1|-|E_2|$最多是多少？

基于上述问题，引入图的反符号边控制的定义：设$G=(V,E)$是一个图，一个函数$f:E\to\{-1,+1\}$，如果对于任意$e\in E(G)$有$\sum\limits_{e'\in N[e]}f(e')\leqslant 0$成立，则称$f$为图$G$的一个反符号边控制函数。一个图$G$的反符号边控制数定义为$\overline{\gamma_s}(G)=\max\left\{\sum\limits_{e\in E(G)}f(e)\,\middle|\,f\text{为图}G\text{的一个反符号边控制函数}\right\}$。特别地，对于$n$阶空图$\overline{K_n}$，则定义$\overline{\gamma_s}(\overline{K_n})=0$.

由上述定义不难看出如下性质：

(i)　对任意图G，均有$\overline{\gamma_s}(G)\equiv|E(G)|\pmod 2$.

(ii)　对于任意两个点不交的图G_1和G_2，均有$\overline{\gamma_s}(G_1\cup G_2)=\overline{\gamma_s}(G_1)+\overline{\gamma_s}(G_2)$.

2　反符号边控制数的新上界

为了方便，设$\mathbf{R}$是一个实数集，且$f:E\to\mathbf{R}$是一个函数，$S\subseteq E(G)$，则记$f(S)=\sum\limits_{e\in E(S)}f(e)$. 并且，将$f(N[e])$记为$f[e]$. 用$P_n$表示具有$n$个顶点的一条路，用$K_n$表示具有$n$个顶点的完全图。

定理1　对于任意n阶连通图G，其边数为m，边度为奇数的边共n_0条，则有

$$\overline{\gamma_s}(G)\leqslant m-\sqrt{\frac{4m^2}{n}-n_0},$$

且此上界是可达的。

证明　设f为图G的一个最大的反符号边控制函数，且$\overline{\gamma_s}(G)=f(E)$.

令

$P=\{e\in E\mid f(e)=1\}$，$P_0=\{e\in P\mid d(e)\text{为奇数}\}$，$P_e=P-P_0$；$Q=\{e\in E\mid f(e)=-1\}$，

$Q_0=\{e\in Q\mid d(e)\text{为奇数}\}$，$Q_e=Q-Q_0$. $|P|=p$，$|Q|=q$，$|P_0|=p_0$，$|P_e|=p_e$，$|Q_0|=q_0$，$|Q_e|=q_e$.

依照图的反符号边控制的定义，对任意$e\in E(G)$，$f[e]\leqslant 0$. 于是有

$$|N(e)\cap Q|\geqslant\begin{cases}\dfrac{d(e)+1}{2}, & e\in P_0,\\[2mm] \dfrac{d(e)}{2}+1, & e\in P_e;\end{cases}\qquad |N(e)\cap P|\leqslant\begin{cases}\dfrac{d(e)+1}{2}, & e\in Q_0,\\[2mm] \dfrac{d(e)}{2}, & e\in Q_e.\end{cases}$$

因此

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in P}d(e)+\frac{1}{2}p_0+p_e\leqslant\sum_{e\in P_0}\frac{d(e)+1}{2}+\sum_{e\in P_e}\left(\frac{d(e)}{2}+1\right)\leqslant\sum_{e\in P}|N(e)\cap Q|=\sum_{e\in Q}|N(e)\cap P|$$
$$\leqslant\sum_{e\in Q_0}\frac{d(e)+1}{2}+\sum_{e\in Q_e}\frac{d(e)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{e\in Q}d(e)+\frac{q_0}{2}.$$

即

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in P}d(e)+\frac{1}{2}p_0+p_e+\frac{1}{2}\sum_{e\in Q}d(e)+\frac{1}{2}p_0\leqslant\frac{1}{2}\sum_{e\in Q}d(e)+\frac{1}{2}\sum_{e\in Q}d(e)+\frac{q_0}{2}+\frac{1}{2}p_0. \tag{1}$$

又由图的反符号边控制的定义知，对任意$e \in Q$，$q \geqslant \frac{d(e)+1}{2}$，即

$$d(e) \leqslant 2q-1. \tag{2}$$

综合式(1)和式(2)得

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in E} d(e)+p \leqslant \sum_{e\in Q} d(e)+\frac{1}{2}n_0 \leqslant \frac{1}{2}n_0+q(2q-1). \tag{3}$$

注意到$p=m-q$，由式(3)得

$$q \geqslant \frac{\sqrt{2m-n_0+\sum_{e\in E} d(e)}}{2}.$$

综上所述得

$$\overline{\gamma_s}(G)=m-2q \leqslant m-\sqrt{2m-n_0+\sum_{e\in E} d(e)}.$$

将$\sum_{e\in E} d(e)=\sum_{u\in V} d^2(u)-2m$ 代入上式得

$$\overline{\gamma_s}(G) \leqslant m-\sqrt{\sum_{u\in V} d^2(u)-n_0}.$$

容易知道，$\sum_{u\in V} d^2(u) \geqslant \frac{4m^2}{n}$. 于是有

$$\overline{\gamma_s}(G) \leqslant m-\sqrt{\frac{4m^2}{n}-n_0}.$$

当$G=P_2$时，上界是可达的。 证毕

定理2 对于任意n阶连通图G，其边数为m，Δ',δ'分别是其最大边度与最小边度，边度为奇数的边共n_0条，则有

$$\overline{\gamma_s}(G) \leqslant \min\left\{-m+\frac{n_0-\sum_{u\in V} d^2(u)+2m(\Delta'+1)}{1+\Delta'},\ -m+\frac{n_0+\sum_{u\in V} d^2(u)-2m}{1+\delta'}\right\},$$

且此上界是可达的。

证明 设f为图G的一个最大的反符号边控制函数，且$\overline{\gamma_s}(G)=f(E)$.

令

$$P=\{e\in E \mid f(e)=1\},\quad E_0=\{e\in E \mid d(e)\text{为奇数}\},\quad |P|=p,$$
$$Q=\{e\in E \mid f(e)=-1\},\quad E_e=\{e\in E \mid d(e)\text{为偶数}\},\quad |Q|=q.$$

依定义知，对任意$e\in E_0, f[e]\leqslant 0$；对任意$e\in E_e, f[e]\leqslant -1$. 于是有

$$\sum_{e\in E} f[e]=\sum_{e\in E_0} f[e]+\sum_{e\in E_e} f[e] \leqslant -|E_e|=-(m-n_0)=n_0-m. \tag{4}$$

另外，

$$\sum_{e\in E} f[e]=\sum_{e\in E} f(e)+\sum_{e\in E}\sum_{e'\in N(e)} f(e')=2p-m+\sum_{e\in P} d(e)-\sum_{e\in Q} d(e). \tag{5}$$

下面证明式(5)成立，即证$\sum_{e\in E}\sum_{e'\in N(e)} f(e')=\sum_{e\in P} d(e)-\sum_{e\in Q} d(e)$.

事实上，定义G_1, G_2如下：$V(G_1)=V(G_2)=V(G), E(G_1)=P, E(G_2)=Q$. 定义

$$d^*(e)=d_{G_1}(e)-d_{G_2}(e). \tag{6}$$

由于

$$d(e)=d_{G_1}(e)+d_{G_2}(e), \tag{7}$$

故

$$d^*(e)=d(e)-2d_{G_2}(e),$$
$$d^*(e)=2d_{G_1}(e)-d(e).$$

所以

$$\sum_{e\in E}\sum_{e'\in N(e)} f(e') = \sum_{e\in E} d^*(e) = \sum_{e\in P} d^*(e) + \sum_{e\in Q} d^*(e)$$
$$= \sum_{e\in P}[d(e) - 2d_{G_2}(e)] + \sum_{e\in Q}[2d_{G_1}(e) - d(e)] = \sum_{e\in P} d(e) - \sum_{e\in Q} d(e).$$

至此式(5)得证。

于是

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} f[e] &= \sum_{e\in E} f(e) + \sum_{e\in E}\sum_{e'\in N(e)} f(e') = 2p - m + \sum_{e\in P} d(e) - \sum_{e\in Q} d(e)\\ &= 2p - m + \sum_{e\in E} d(e) - 2\sum_{e\in Q} d(e) \geqslant 2p - m + \sum_{e\in E} d(e) - 2(m-p)\Delta',\end{aligned} \tag{8}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} f[e] &= \sum_{e\in E} f(e) + \sum_{e\in E}\sum_{e'\in N(e)} f(e') = 2p - m + \sum_{e\in P} d(e) - \sum_{e\in Q} d(e)\\ &= 2p - m - \sum_{e\in E} d(e) + 2\sum_{e\in P} d(e) \geqslant 2p - m - \sum_{e\in E} d(e) + 2p\delta'.\end{aligned} \tag{9}$$

由式(4)和式(8)得

$$2p \leqslant \frac{n_0 - \sum_{e\in E} d(e) + 2m\Delta'}{1+\Delta'}.$$

又由式(4)和式(9)得

$$2p \leqslant \frac{n_0 + \sum_{e\in E} d(e)}{1+\delta'}.$$

综上可得

$$\overline{\gamma_s}(G) = 2p - m \leqslant \min\left\{-m + \frac{n_0 - \sum_{e\in E} d(e) + 2m\Delta'}{1+\Delta'},\ -m + \frac{n_0 + \sum_{e\in E} d(e)}{1+\delta'}\right\}.$$

将 $\sum_{e\in E} d(e) = \sum_{u\in V} d^2(u) - 2m$ 代入上式得

$$\overline{\gamma_s}(G) \leqslant \min\left\{-m + \frac{n_0 - \sum_{u\in V} d^2(u) + 2m(\Delta'+1)}{1+\Delta'},\ -m + \frac{n_0 + \sum_{u\in V} d^2(u) - 2m}{1+\delta'}\right\}.$$

当 $G=K_3$ 时，上界可达。　　证毕

推论 1　对于任意 n 阶连通图 G，其边数为 m，Δ',δ' 分别是其最大边度与最小边度，边度为奇数的边共 n_0 条，则有 $\overline{\gamma_s}(G) \leqslant \dfrac{2n_0 - 2m + (\Delta'-\delta')m}{2+\Delta'+\delta'}$，且此上界可达。

证明　由定理 2 的证明

$$2p \leqslant \frac{n_0 - \sum_{e\in E} d(e) + 2m\Delta'}{1+\Delta'},\qquad 2p \leqslant \frac{n_0 + \sum_{e\in E} d(e)}{1+\delta'}.$$

可得

$$2p(2+\Delta'+\delta') \leqslant 2n_0 + 2m\Delta',$$

即

$$2p \leqslant \frac{2n_0 + 2m\Delta'}{2+\Delta'+\delta'}.$$

于是

$$\overline{\gamma_s}(G) = 2p - m \leqslant \frac{2n_0 - 2m + (\Delta'-\delta')m}{2+\Delta'+\delta'}.$$

当 $G=K_3$ 时，上界可达。　　证毕

推论2 对于任意n阶r正则图G，由推论1不难得到：$\overline{\gamma_s}(G) \leqslant -\frac{nr}{4r-2}$，且此上界可达。

参考文献：

［1］ BONDY J A，MURTY U S R. Graph theory［M］. Berlin：Springer，2008.

［2］ COCKAYNE E J，MYNHART C M. On a generalization of signed domination functions of graphs［J］. Ars Combinatoria，1996，43：235-245.

［3］ HAYNES T W，HEDETNIEMI S T，SLATER P J. Domination in graphs［M］. Boca Raton：CRC Press，1998.

［4］ HAYNES T W，HEDETNIEMI S T，SLATER P J. Fundamentals of domination in graphs［M］. Boca Raton：CRC Press，1998.

［5］ XU B G. On signed edge domination numbers of graphs［J］. Discrete Mathematics，2001，239(1)：179-189.

［6］ XU B G. On edge domination numbers of graphs［J］. Discrete Mathematics，2005，294(3)：311-316.

［7］ XU B G. Two classes of edge domination in graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2006，154(10)：1541-1546.

［8］ 黄中升，邢化明，赵燕冰. 图的逆符号边控制数的上界[J]. 应用数学学报，2010，33(5)：840-846.

［9］ KANG L Y，SHAN E F. Signed and minus dominating functions in graphs［M］// HAYNES T W，et al，eds. Topics in domination in graphs，Developments in Mathematics（Vol 64）. Cham：Springer，2020：301-348.

［10］ SHAN E F，KANG L Y. Characterization of graphs with equal domination and matching numbers［J］. Advances in Mathematics，2004，33(2)：229-235.

［11］ PAL S，PRADHAN D. The strong domination problem in block graphs and proper interval graphs［J］. Discrete Mathematics Algorithms and Applications，2019，11(6)：111-118.

［12］ HAJIBABA M，RAD N J. A note on the italian domination number and double roman domination number in graphs［J］. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing，2019，109(MAY)：169-183.

［13］ 张旭，陈学刚. 图的有效符号边控制数[J]. 天津科技大学学报，2015，30(4)：73-77.

（责任编辑　冯兆永）